

Widmo operatora

1.1. C^* -algebra operatorów na przestrzeni Hilberta

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Przestrzeń Banacha $B(\mathcal{H})$ jest algebrą nad $\mathbb{C}$ z mnożeniem zdefiniowanym jako składanie operatorów. Algebra ta ma jedynkę (element neutralny mnożenia) – jest nią operator identycznościowy $\mathbb{1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Operacja brania operatora sprzężonego

$$B(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto x^* \in B(\mathcal{H})$$

jest antyliniową, antymultiplikatywną inwolucją (dla każdego $x \in B(\mathcal{H})$ mamy $x^{**} = x$). Ponadto norma operatorowa jest zgodna ze strukturą algebry w tym sensie, że

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in B(\mathcal{H}).$$

W szczególności $B(\mathcal{H})$ jest *algebrą Banacha*.

Stwierdzenie 1.1. *Dla $x \in B(\mathcal{H})$ mamy*

- (1) $\|x\| = \|x^*\|$,
- (2) $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Dowód. Obie równości są oczywiste, gdy $x = 0$. Przyjmijmy więc, że mamy $\|x\| > 0$. Wówczas oczywiście

$$\|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|.$$

Dalej obliczamy

$$\begin{aligned} \|x^*x\| &= \sup_{\|\xi\|=1} \|x^*x\xi\| = \sup_{\|\xi\|=1} \sup_{\|\eta\|=1} |\langle \eta | x^*x\xi \rangle| \\ &\geq \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \xi | x^*x\xi \rangle| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|. \quad (1.1)$$

Skracając $\|x\|$ po obu stronach otrzymujemy

$$\|x\| \leq \|x^*\|,$$

co na mocy symetrii pokazuje, że $\|x^*\| = \|x\|$, a podstawiając ten wynik do (1.1), otrzymujemy $\|x^*x\| = \|x\|^2$. $\square$

Uwaga 1.2. Zauważmy, że dowód stwierdzenia 1.1 można rozszerzyć również na przypadek, gdy x jest operatorem pomiędzy różnymi przestrzeniami Hilberta. Tak więc jeśli $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ są przestrzeniami Hilberta, to dla każdego $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ mamy $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Stwierdzenie 1.1(1) mówi, że inwolucja $x \mapsto x^*$ na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest izometrią. Algebrę Banacha wraz z izometryczną antyliniową i antymultiplikatywną inwolucją nazywamy **-algebrą Banacha*, natomiast *-algebrę Banacha, w której spełniony jest warunek (2) ze stwierdzenia 1.1 nazywamy *C*-algebrą*. Tak więc $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest C*-algebrą.

Co więcej, każda normowo domknięta *-podalgebra² $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ także jest C*-algebrą. Dla dowolnego podzbioru $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ istnieje najmniejsza C*-algebra $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zawierająca S . Nazywamy ją C*-algebrą *generowaną* przez S i oznaczamy symbolem $C^*(S)$. Nietrudno wykazać, że $C^*(S)$ jest domknięciem zbioru kombinacji liniowych dowolnych iloczynów elementów zbioru S i $S^* = \{s^* \mid s \in S\}$. Dla $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będziemy pisać $C^*(x)$ oraz $C^*(x, \mathbb{1})$ zamiast $C^*(\{x\})$ i $C^*(\{x, \mathbb{1}\})$.

Przykładem C*-algebry jest także przestrzeń $C(X)$ dla zwartej przestrzeni X z normą jednostajną $\|\cdot\|_\infty$, punktowym dodawaniem i mnożeniem oraz inwolucją $f \mapsto \bar{f}$. Pozornie innym przykładem jest przestrzeń $C_b(Y)$ ograniczonych funkcji ciągłych na lokalnie zwartej przestrzeni Y z normą $\|\cdot\|_\infty$ i punktowymi działaniami. Jest to przykład tylko pozornie odmienny, gdyż w istocie $C_b(Y)$ jest naturalnie izomorficzna z $C(\beta Y)$, gdzie βY jest uzwarciem Čecha–Stone’a przestrzeni Y .³

1.2. Widmo i promień spektralny

Niech $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Przypomnijmy, że x jest *odwracalny*, jeśli istnieje operator $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ taki, że $xy = yx = \mathbb{1}$. Zbiorem *rezolwentowym* x nazywamy

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{operator } \lambda\mathbb{1} - x \text{ jest odwracalny}\},$$

a jego dopełnienie $\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$ nazywamy *widmem* lub *spektrum* operatora x .

Wiadomo, że zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty, a $\rho(x)$ jest przeciwobrazem tego zbioru przy ciągłym odwzorowaniu

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto \lambda\mathbb{1} - x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

co pokazuje, że zbiór rezolwentowy jest otwarty. Co więcej, jeśli $\lambda_0 \in \rho(x)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0\mathbb{1} - x)^{-1}\|},$$

²Podprzestrzeń wektorowa zamknięta na składanie operatorów i operację brania operatora sprzężonego.

³Por. [Eng, Wniosek 3.6.3].

to $\lambda \in \rho(x)$ i

$$(\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 \mathbb{1} - x)^{-n-1}.$$

W szczególności odwzorowanie $\rho(x) \ni \lambda \mapsto (\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (zwane *rezolwentą* operatora x) jest holomorficzne.

Uwaga 1.3. Dla dowolnych $\lambda, \mu \in \rho(x)$ mamy

$$(\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda \mathbb{1} - x)^{-1}(\mu \mathbb{1} - x)^{-1}. \quad (1.2)$$

(w szczególności wartości rezolwenty x w różnych punktach $\rho(x)$ są przemienne). Istotnie: wzór jest oczywisty dla $\lambda = \mu$, a dla $\lambda \neq \mu$ łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - x)^{-1}) (\mu \mathbb{1} - x) (\lambda \mathbb{1} - x) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} (\mu \mathbb{1} - x) - \mathbb{1}) (\lambda \mathbb{1} - x) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} ((\mu - \lambda) \mathbb{1} + (\lambda \mathbb{1} - x)) - \mathbb{1}) (\lambda \mathbb{1} - x) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} ((\mu - \lambda)(\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} + \mathbb{1} - \mathbb{1}) (\lambda \mathbb{1} - x) = \mathbb{1} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (\mu \mathbb{1} - x) (\lambda \mathbb{1} - x) \frac{1}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - x)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu \mathbb{1} - x) (\mathbb{1} - (\lambda \mathbb{1} - x)(\mu \mathbb{1} - x)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu \mathbb{1} - x) (\mathbb{1} - ((\lambda - \mu) \mathbb{1} + (\mu \mathbb{1} - x))(\mu \mathbb{1} - x)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu \mathbb{1} - x) (\mathbb{1} - (\lambda - \mu)(\mu \mathbb{1} - x)^{-1} + \mathbb{1}) = \mathbb{1}, \end{aligned}$$

czyli operator $(\mu \mathbb{1} - x)(\lambda \mathbb{1} - x)$ jest odwracalny, a jego odwrotnym jest $\frac{1}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - x)^{-1})$. Wzór (1.2) nazywamy *wzorem rezolwentowym* lub *tożsamością rezolwentową*.

Stwierdzenie 1.4. Niech $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wtedy

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}. \quad (1.3)$$

Dowód. Niech $\lambda \in \rho(yx) \setminus \{0\}$. Operator $\lambda \mathbb{1} - xy$ jest odwracalny, gdyż

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbb{1} - xy) \left(\frac{1}{\lambda} (\mathbb{1} + x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbb{1} - xy + (\lambda \mathbb{1} - xy)x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbb{1} - xy + x(\lambda \mathbb{1} - yx)(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\lambda \mathbb{1} - xy + xy) = \mathbb{1} \end{aligned}$$

i

$$\left(\frac{1}{\lambda} (\mathbb{1} + x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y) \right) (\lambda \mathbb{1} - xy)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbb{1} - xy + x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y(\lambda \mathbb{1} - xy)) \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbb{1} - xy + x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}(\lambda \mathbb{1} - yx)y) \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbb{1} - xy + xy) = \mathbb{1},
\end{aligned}$$

czyli operator $\frac{1}{\lambda}(\mathbb{1} + x(\lambda \mathbb{1} - yx)^{-1}y)$ jest odwrotny do $(\lambda \mathbb{1} - xy)$, a więc $\lambda \in \rho(xy) \setminus \{0\}$. Tym samym wykazaliśmy, że $\rho(yx) \setminus \{0\} \subset \rho(xy) \setminus \{0\}$. Na mocy symetrii także $\rho(xy) \setminus \{0\} \subset \rho(yx) \setminus \{0\}$, a stąd $\rho(xy) \setminus \{0\} = \rho(yx) \setminus \{0\}$. Innymi słowy $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. $\square$

Uwaga 1.5. Odejmując zbiór $\{0\}$ od obu stron wzoru (1.3), otrzymujemy jego inne sformułowanie:

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\},$$

które również bywa bardzo użyteczne.

Stwierdzenie 1.6. *Mamy $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\} \subset \rho(x)$.*

Dowód. Jeśli $|\lambda| > \|x\|$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

jest zbieżny, gdyż $\|\lambda^{-n} x^n\| \leq \left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n$. Łatwo sprawdzić, że jego suma jest operatorem odwrotnym do $\lambda \mathbb{1} - x$. $\square$

W szczególności dla dowolnego $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mamy

$$\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x) \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\},$$

czyli widmo x jest zbiorem domkniętym i ograniczonym (a więc zwartym).

Twierdzenie 1.7. *Dla dowolnego $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mamy*

- (1) $\sigma(x)$ jest zbiorem niepustym,
- (2) ciąg $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dowód. Zdefiniujemy

$$\alpha(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Weźmy $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że $\|x^{n_\varepsilon}\|^{\frac{1}{n_\varepsilon}} \leq \alpha(x) + \varepsilon$, albo inaczej

$$\|x^{n_\varepsilon}\| \leq (\alpha(x) + \varepsilon)^{n_\varepsilon}.$$

Teraz dowolną liczbę naturalną n dzielimy z resztą przez n_ε , tj. znajdujemy $q, r \in \mathbb{Z}_+$ takie, że

$$n = qn_\varepsilon + r$$

i $r < n_\varepsilon$. Mamy

$$\|x^n\| = \|x^{qn_\varepsilon} x^r\| \leq \|x^{n_\varepsilon}\|^q \|x\|^r \leq (\alpha(x) + \varepsilon)^{qn_\varepsilon} \|x\|^r = (\alpha(x) + \varepsilon)^{n-r} \|x\|^r.$$

Stąd

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\alpha(x) + \varepsilon)^{1 - \frac{r}{n}} \|x\|^{\frac{r}{n}}.$$

Tak więc

$$\alpha(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha(x) + \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolnie mały, widzimy, że ciąg $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny (do $\alpha(x)$).

W szczególności, jeśli $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ są przemienne, to

$$\begin{aligned} \alpha(xy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(xy)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n y^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \|y^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n\|^{\frac{1}{n}} = \alpha(x) \alpha(y). \end{aligned}$$

Jeśli $|\lambda| > \alpha(x)$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{|\lambda|^n}$ jest zbieżny, więc zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

i łatwo sprawdzamy, że jego suma jest operatorem odwrotnym do $\mathbb{1} - \frac{x}{\lambda}$. Stąd $\lambda \mathbb{1} - x$ jest operatorem odwracalnym. Tym samym pokazaliśmy, że

$$\alpha(x) \geq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}. \quad (1.4)$$

Dla dowodu przeciwnej nierówności i faktu, że widmo x jest niepuste, rozważmy dwa przypadki.

1. Jeśli $\alpha(x) = 0$, to x nie jest odwracalny, czyli $0 \in \sigma(x)$. Istotnie: gdyby x był odwracalny, mielibyśmy

$$1 = \alpha(\mathbb{1}) = \alpha(xx^{-1}) \leq \alpha(x)\alpha(x^{-1}) = 0.$$

2. Jeśli $\alpha(x) > 0$, to przypuśćmy, że $\alpha(x) > \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Ponieważ $\sigma(x)$ jest zbiorem zwartym, istnieje $r \in]0, \alpha(x)[$ o tej własności, że

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}.$$

Tak więc zbiór $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r\}$ zawiera się w $\rho(x)$. Dla dowolnego ciągłego funkcjonału φ na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ funkcja

$$D \ni \lambda \longmapsto \varphi((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1}) \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna. Ponadto, dla $|\lambda| > \alpha(x)$ mamy

$$\varphi((\lambda \mathbb{1} - x)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \varphi(x^n).$$

Funkcja ta znika⁴, gdy $\lambda \rightarrow \infty$, więc

$$f(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \varphi((\frac{1}{\mu}\mathbf{1} - x)^{-1}), & 0 < |\mu| < \frac{1}{r} \end{cases}$$

definiuje funkcję analityczną na $D^{-1} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| < \frac{1}{r}\}$ o rozwinięciu Taylora wokół zera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} \varphi(x^n).$$

Rozwinięcie to musi być zbieżne na całym kole D^{-1} , a więc także dla $\mu = \frac{1}{\lambda_0}$ takich, że $r < |\lambda_0| < \alpha(x)$.

W szczególności dla $\mu \in D^{-1}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{n+1} \varphi(x^n) = 0.$$

Weźmy więc λ_0 taką, że $r < |\lambda_0| < \alpha(x)$. Wtedy $\lambda_0^{-1} \in D^{-1}$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0^{-n-1} \varphi(x^n) = 0.$$

Rozważmy rodzinę (ciąg) ciągłych funkcjonałów liniowych na $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$ danych przez

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})^* \ni \varphi \longmapsto \lambda_0^{-n-1} \varphi(x^n) \in \mathbb{C}.$$

Z twierdzenia Banacha–Steinhausa wynika, że istnieje stała $c < +\infty$ taka, że

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_0|^{-n-1} \|x^n\| = c.$$

Stąd

$$\|x^n\| \leq c |\lambda_0|^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a w konsekwencji

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} |\lambda_0|^{1+\frac{1}{n}} = |\lambda_0| < \alpha(x).$$

Sprzeczność ta pokazuje, że nie jest możliwe, aby $\alpha(x) > \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. Innymi słowy mamy

$$\alpha(x) \leq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\},$$

co w połączeniu z (1.4) daje $\alpha(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$. □

⁴Jeśli $|\mu| > 1$, to

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \mu)^{-n-1} \varphi(x^n) \right| \leq \frac{\|\varphi\|}{|\mu|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}} |\mu|^{-n} \leq \frac{\|\varphi\|}{|\mu|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} 0.$$

Szereg jest zbieżny, gdyż $|\lambda| > \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, czyli $|\lambda|^{-1} < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}}$.

Dla $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wielkość

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$$

nazywamy *promieniem spektralnym* x i oznaczamy symbolem $|\sigma(x)|$. Oto kilka własności promienia spektralnego:

- dla każdego x mamy $|\sigma(x)| \leq \|x\|$,
- jeśli $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ są przemienne, to $|\sigma(xy)| \leq |\sigma(x)||\sigma(y)|$,
- $|\sigma(x^*)| = |\sigma(x)|$.

Ostatnia własność wynika natychmiast z faktu, że

$$\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Stwierdzenie 1.8. Niech $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i niech $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_n\lambda^n$ będzie wielomianem. Niech

$$p(x) = \alpha_0\mathbb{1} + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n.$$

Wtedy

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dowód. Jeśli $n = 0$ (p jest stały), to teza stwierdzenia jest oczywista. Załóżmy więc, że $n \geq 1$. Niech $\lambda_0 \in \sigma(x)$, czyli $\lambda_0\mathbb{1} - x$ nie jest odwracalny. Wtedy operator $p(\lambda_0)\mathbb{1} - p(x)$ nie może być odwracalny, gdyż

$$\begin{aligned} p(\lambda_0)\mathbb{1} - p(x) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k(\lambda_0^k\mathbb{1} - x^k) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k(\lambda_0^k\mathbb{1} - x^k) = (\lambda_0\mathbb{1} - x) \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_0^{k-j} x^{j-1}. \end{aligned}$$

Fakt ten pokazuje, że

$$p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x)).$$

Z drugiej strony, jeśli $\mu \notin \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(x)\}$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są pierwiastkami wielomianu $\mu - p(\lambda)$, to oczywiście $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(x)$. Mamy

$$\mu - p(\lambda) = \gamma(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dla pewnego $\gamma \neq 0$, więc

$$\mu\mathbb{1} - p(x) = \gamma(\lambda_1\mathbb{1} - x) \cdots (\lambda_n\mathbb{1} - x).$$

Stąd $\mu\mathbb{1} - p(x)$ jest odwracalny, co oznacza, że $\mu \notin \sigma(p(x))$. Tym samym wykazaliśmy, że

$$p(\sigma(x)) \supset \sigma(p(x)).$$

□

1.3. Widmo w C^* -algebrach

Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką (przykładem może być $B(\mathcal{H})$ dla pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ lub $C(X)$ dla zwartej przestrzeni X , ale nie tylko) i niech $a \in A$. Podobnie jak w przypadku $B(\mathcal{H})$ mówimy, że element $a \in A$ jest *odwracalny*, jeśli istnieje $b \in A$ taki że $ab = ba = \mathbf{1}$. Dalej definiujemy *widmo* elementu a :

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{element } \lambda \mathbf{1} - a \text{ nie jest odwracalny}\}.$$

Dla przykładu rozważmy C^* -algebrę $A = C(X)$, gdzie X jest przestrzenią zwartą. Wówczas nietrudno sprawdzić, że widmem elementu $f \in A$ jest obraz funkcji f .

Twierdzenie 1.9. *Niech a będzie elementem C^* -algebry z jedyneką. Wówczas:*

- (1) $\sigma(a)$ jest niepustym zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ zawartym w domkniętym dysku o środku w 0 i promieniu $\|a\|$,
- (2) ciąg $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\},$$

- (3) dla dowolnego $b \in A$ mamy $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$,
- (4) dla dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{C}[\cdot]$ mamy $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

Dowody wszystkich punktów powyższego twierdzenia można przeprowadzić zamieniając $B(\mathcal{H})$ na A w dowodach twierdzenia 1.7 i stwierdzeń 1.4 oraz 1.8.

Notatki

Przytoczone w niniejszym rozdziale podstawy teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta omówione są praktycznie w każdej pozycji literatury z listy na końcu książki. Więcej informacji na temat widm operatorów i elementów C^* -algebr znajdzie czytelnik w takich książkach jak np. [Arv₂, Ped, Mau], jak i w wielu innych. Naturalnym uogólnieniem teorii operatorów jest teoria algebr Banacha, a w szczególności teoria C^* -algebr ([Arv₁, Zel]). Za cenę nieco bardziej abstrakcyjnych rozumowań pozwala ona łatwo uzyskać pewne wyniki teorii operatorów. Mimo to w niniejszej książce postaramy się zminimalizować korzystanie z tej teorii, pozostawiając czytelnikowi pole do samodzielnych poszukiwań.

Wspaniałym źródłem ćwiczeń i przykładów związanych z pojęciem widma jest zbiór zadań [Hal] oraz ćwiczenia, notatki i uzupełnienia z takich podręczników jak [Arv₁, Arv₂, ReSi₁, Rud₂].